Ασκήσεις Πραγματικής Ανάλυσης

Δευτέρα 9 Μαΐου 2016

7^{ο} Φυλλάδιο - Πλήρεις Μετρικοί Χώροι

Άσκηση 1. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $f : X \to X$ συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι το σύνολο $\operatorname{Fix} f = \{x \in X : f(x) = x\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Άσκηση 2. (i) Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \to X$ τέτοια ώστε η f^n να είναι συστολή για κάποιο $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο. *(Υπόδειξη: Από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach, η συνάρτηση f^n έχει μοναδικό σταθερό σημείο.)*

(ii) Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $f, g : X \to X$ τέτοιες ώστε $f \circ g = g \circ f$. Αν η f συστολή, να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0) = x_0$.

Άσκηση 3. Θεωρείστε τη συνάρτηση $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ με $f(x) = x + \frac{1}{x}$, για κάθε $x \in [1, \infty)$. Να δειχθεί ότι $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, για κάθε $x \neq y \in [1, \infty)$, αλλά η f δεν έχει σταθερό σημείο. Ποια συνθήκη του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Banach δεν ικανοποιείται;

Άσκηση 4. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $D \subseteq X$ πυκνό με την ιδιότητα ότι κάθε Cauchy ακολουθία του D συγκλίνει στον X. Να δειχθεί ότι ο (X, ρ) είναι πλήρης.

Άσκηση 5. (i) Να δειχθεί ότι κάθε ευθεία του επιπέδου είναι κλειστό σύνολο με κενό εσωτερικό.

(ii) Το επίπεδο δεν μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση ευθειών.

Άσκηση 6. Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $(f_i)_{i \in I}$ οικογένεια συνεχών συναρτήσεων $f_i : X \to \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\{f_i(x) : i \in I\}$ να είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Να δειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $a > 0$, το σύνολο $F_a = \{x \in X : |f_i(x)| \leq a, \text{ για κάθε } i \in I\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

(ii) Υπάρχει $U \subseteq X$ ανοικτό, στο οποίο η οικογένεια $(f_i)_{i \in I}$ να είναι ομοιόμορφα φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f_i(x)| \leq M$, για κάθε $i \in I$ και κάθε $x \in U$.

Εσωτερικό Συνόλων

Άσκηση 7. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$. Να δειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Αν $A \subseteq B$, τότε $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$.

(ii) $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$, $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq (A \cup B)^\circ$ και να δοθεί παράδειγμα συνόλων όπου ο εγκλεισμός είναι γνήσιος.

Άσκηση 8. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Να δειχθεί ότι ο X γράφεται ως ξένη ένωση

$$\begin{aligned} X &= \overline{A} \cup (X \setminus A)^\circ \\ &= \mathring{A} \cup \overline{X \setminus A}. \end{aligned}$$